

Rapport sur une mission au Vietnam du 11 au 27 août 2023

Jean-Pierre BOURGUIGNON

Professeur honoraire Nicolaas Kuiper à l'IHÉS, Directeur de recherche émérite au CNRS

Du 11 au 27 août 2023, j'ai effectué une mission au Vietnam pour participer à une école d'été de géométrie différentielle organisée au Vietnam Institute for Advanced Study in Mathematics (VIASM) à Hanoi conjointement par cet institut et l'International Centre for Theoretical Physics (ICTP) basé à Trieste, Italie, avec le soutien du Clay Mathematics Institute et de la Commission pour les pays en voie de développement de l'Union Mathématique Internationale accompagnée par le Abel Board.

La géométrie différentielle est mon domaine de recherche, d'où mon intérêt pour cette école, et le fait que j'ai accepté l'invitation à y participer que m'a faite NGÔ Bao Châu, le directeur scientifique du VIASM. Je suis aussi membre de l'International Advisory Board du VIASM mis en place au moment de sa création, il y a maintenant plus de 10 ans. C'était donc une bonne occasion de refaire une visite au VIASM. J'étais aussi à Hanoi en 2018 mais avec un agenda plus politique (j'étais alors en fonction comme président du Conseil européen de la recherche.)

L'an dernier, je n'avais pu me rendre à l'inauguration officielle du nouveau bâtiment que le VIASM a maintenant en propre dans le centre d'Hanoi. C'était initialement une école privée avec un bâtiment en forme de U qui a été considérablement agrandi en construisant deux étages supplémentaires et en remplaçant la cour au rez-de-chaussée par un amphithéâtre spacieux de 200 places très bien équipé qui porte le nom de Laurent SCHWARTZ (voir ci-contre la dédicace à côté de la porte) en souvenir de son engagement pendant la guerre du Vietnam. C'est un cadre tout à fait adéquat pour les diverses activités du VIASM avec des bureaux pour les chercheurs et pour l'administration, des salles de réunion de tailles variables et une petite cafétéria. Le VIASM organise de nombreux événements au cours de l'année.



L'école d'été proprement dite

L'école d'été était organisée par Claudio AREZZO, le directeur de la section mathématiques de l'ICTP, LÊ Minh Há, le directeur du VIASM, NGUYEN Thac Dung, professeur à l'Université nationale du Vietnam, et TRAN Thanh Hung, professeur à l'Université Texas Tech. Elle a rassemblé une cinquantaine d'étudiants venant d'une quinzaine de pays, notamment du Vietnam bien entendu. Il y a avait aussi quelques post-doctorant.e.s travaillant dans des sujets voisins de ceux traités par les cours donnés dans le cadre de l'école ou pas nécessairement et quelques collègues, avec l'objectif d'élargir leur champ de vision. J'ai plus spécialement échangé avec deux étudiants vietnamiens qui sont en train de faire des thèses en France, l'un à Montpellier (avec un de mes anciens élèves Marc HERZLICH) et l'autre à Paris-Nord. Les étudiant.e.s ont été remarquablement assidu.e.s... et moi aussi !



D'une certaine façon le thème sous-jacent à presque tous les cours de l'école était la question de la convergence de familles de métriques riemanniennes sur des variétés différentiables sous des contraintes sur la courbure. Les cinq cours comprenaient cinq exposés et ils étaient complétés par des séances d'illustration montrant des situations plus concrètes pour lesquels les calculs étaient conduits de façon exhaustive.

J'ai personnellement regretté qu'il n'y ait pas eu plus de véritables sessions où les étudiant.e.s puissent directement interagir avec les enseignant.e.s et les expert.e.s dans la salle afin de mieux tester leur niveau de compréhension. Bien entendu il y avait tout de même pendant les cours quelques questions et la possibilité d'intervenir à la fin de chaque exposé.

Le premier cours, intitulé *Convergence of Riemannian Manifolds and Scalar Curvature* a été donné par Brian ALLEN, Assistant Professor à Lehman College à City University of New York (CUNY) du 14 au 16 août. Le point qu'il avait choisi de mettre en lumière est la diversité des situations qui peuvent être rencontrées dans la convergence suivant le type de convergence envisagée, à savoir celle de la métrique de Gromov-Hausdorff ou celle qui est appelée *Intrinsic Flat*. Un exposé plus technique sur ces types de convergence a été donné depuis New York par Christina SORMANI, une ancienne étudiante de Jeff CHEEGER qui est maintenant professeure à Lehman College et aussi au CUNY Graduate Centre. Elle et Brian ALLEN ont publié plusieurs articles ensemble sur ces sujets.

Le deuxième cours a été donné du 16 au 18 août par André NEVES, professeur à l'Université de Chicago, États-Unis, et un des meilleurs spécialistes des surfaces minimales. Le titre de son cours était *Minimal Surfaces and Zoll Metrics*, faisant référence à des métriques très particulières sur la sphère dont toutes les géodésiques sont fermées de même longueur, des objets qui ne peuvent exister sur l'espace projectif réel, quotient de la sphère par l'antipodie. L'essentiel du cours a porté sur le comportement asymptotique du nombre de surfaces minimales dans des variétés de dimension 3 qui portent une métrique hyperbolique, généralisant une notion d'entropie liée au volume introduite par Gérard BESSON, Gérard COURTOIS et Sylvestre GALLOT qui ont prouvé en 1995 que l'égalité dans l'inégalité sur l'entropie n'a lieu que pour la métrique hyperbolique.

C'est Claudio AREZZO, le directeur de la section mathématiques de l'ICTP, qui a donné le troisième cours intitulé *The Geometry of Constant Scalar Curvature Kähler Metrics*. Dans ce cours, donné les 18,

19, 21 et 22 août, sur un sujet qui a récemment attiré beaucoup d'attention en liaison avec la situation des variétés à première classe de Chern positive, il s'est spécialement intéressé à la situation des variétés kählériennes asymptotiquement localement euclidiennes, les espaces ALE, qui fournissent des modèles intéressants en relativité générale. Les bouts à l'infini peuvent être des quotients du plan complexe par des groupes discrets. Cela lui a donné l'occasion de discuter la résolution des singularités pour des actions de groupes assez simples, comme les éclatements.

Le quatrième cours a été donné par Artem PULEMOTOV, professeur associé à l'Université du Queensland à Brisbane, Australie, les 21, 22, 24 et 25 août. Il était intitulé *The Prescribed Ricci Curvature Problem*, un sujet qui suppose bien entendu d'avoir une bonne compréhension de la courbure de Ricci comme objet géométrique mais aussi des méthodes d'équations aux dérivées partielles qui permettent de résoudre le problème. Cela lui a permis d'aborder la question de l'itération de l'équation $\text{Ric}(g) = T$ où $\text{Ric}(g)$ désigne la courbure de Ricci de la métrique g et T un 2-tenseur symétrique. Il s'est focalisé sur le cas où le 2-tenseur prescrit T définit lui-même une métrique. Il a terminé le cours en portant une attention particulière à la situation des métriques homogènes ou de co-homogénéité un.

C'est WEI Guofang, professeure à l'Université de Californie à Santa Barbara qui a donné le cinquième cours sur le thème *Some Recent Results for Spaces with Ricci Curvature Lower Bounds* les 21, 22, 24 et 25 août. Depuis l'introduction par Misha GROMOV de la métrique de Gromov-Hausdorff sur l'espace des espaces métriques et son théorème de compacité pour les suites satisfaisant des bornes de ce type, de nombreux résultats ont été obtenus qui permettent d'analyser la structure des espaces limites de telles suites du point de vue de leur régularité. C'était une bonne conclusion pour la série de cours car ce dernier cours faisait appel d'une façon ou d'une autre à la plupart des notions qui ont été présentées dans les autres cours.

Ma rencontre avec Dominique LAFFLY, attaché scientifique à l'Ambassade de France

Le vendredi 17 août, Monsieur Dominique LAFFLY, attaché scientifique à l'Ambassade de France, est venu me rencontrer au VIASM. L'institut est un endroit qu'il a visité souvent dans sa fonction. Géographe, il collabore depuis longtemps avec des scientifiques vietnamiens, mais sa mission comme attaché scientifique à l'Ambassade de France au Vietnam commencée il y a deux ans s'est terminée à la fin du mois d'août, et il va retrouver l'institut d'architecture de l'Université de Toulouse où il est professeur.

Il m'a fait un point sur les relations scientifiques entre la France et le Vietnam, avec la situation singulière des mathématiques avec un flux important de chercheur.e.s formé.e.s en France au niveau de la thèse, comme NGÔ Bao Châu l'a été en son temps. Il constate cependant que c'est souvent par d'autres moyens que les soutiens mis à disposition par l'Ambassade. Ceci m'a été confirmé par deux participants à l'École d'été faisant leur thèse en France qui m'ont dit préférer passer par l'École Normale Supérieure ou l'École polytechnique, ce que le haut niveau de la formation en mathématiques au Vietnam permet.

Nous avons aussi parlé un peu de la conférence *Mathématiques et développement* qui va se tenir vers la fin septembre au VIASM. Elle est co-organisée avec la mission aux relations internationales de l'Académie des Sciences et aussi l'IRD. Avant son départ, il devait préparer les éléments de langage pour le discours que va utiliser le nouvel Ambassadeur de France qui prend ses fonctions début septembre à l'ouverture de cette conférence.

La session *Topics in Contemporary Differential Geometry* à Tuan Chau

A la fin de la première semaine l'école d'été s'est déplacée à Tuan Chau, point de départ pour les visites de la baie d'Ha Long. Nous avons fait le voyage le vendredi 18 août après-midi et nous sommes revenus à Hanoi dans l'après-midi du dimanche 20 août.

Toute la journée du samedi 19 août a été consacrée à une session intitulée *Topics in Contemporary Differential Geometry* avec six exposés.

C'est moi qui ai ouvert le feu de cette session avec un exposé intitulé *Spinors in 2023, a Mathematician's Point of View* – le fichier de mon exposé accompagne mon rapport.

J'y ai présenté les interactions de la théorie des spineurs avec diverses questions géométriques comme l'existence de métriques à courbure scalaire positive et aussi le rôle des spineurs de Killing en relation avec la supersymétrie et l'holonomie.

Dans les discussions ultérieures, j'ai pu constater que nombre de participants entendaient parler des spineurs pour la première fois. Heureusement j'avais anticipé cela et inclus dans ma présentation une description des fondements de la théorie.



La deuxième conférence a été donnée par Shin Ichi OHTA, professeur à l'Université d'Osaka, Japon, qui a déjà reçu de nombreux prix pour ses travaux de recherche. Son exposé était intitulé *Optimal transport and time-like lower Ricci curvature bounds on Finsler space-times*. Il y traite des estimations de dimension lorsque la courbure de Ricci a une borne inférieure dans toutes les directions de type temps et le lien avec la convexité de l'entropie pour la métrique de Wasserstein dans les espaces de mesures de probabilité.

C'est CHO Gun Hee qui a donné le dernier exposé de la matinée sur le thème des formules de Bochner-Weitzenböck pour toutes sortes de champs de tenseurs. Il est actuellement *Assistant Professor* en visite à l'Université de Californie à Santa Barbara. Son travail est fait en partie en commun avec NGUYEN Thac Dung, l'un des organisateurs de l'école d'été.

L'après-midi a été ouverte par une conférence de Richard SCHOEN sur le thème des sous-variétés minimales en grande codimension. Le problème est notoirement plus difficile à cause du fait que le fibré normal à la sous-variété est multi-dimensionnel, ce qui rend les formules de variation très compliquées à estimer. C'est un sujet sur lequel lui et d'autres chercheurs continuent de progresser.

Dans son exposé Timothy BUTTSWORTH, assistant à l'Université du Queensland à Brisbane, a traité des *Cigar and Bryant Ricci Solitons*, présentant un certain nombre de solutions explicites à l'équation des solitons, pour des espaces compacts et des espaces complets, quelquefois en passant à la limite.

NGUYEN Minh Hoang, professeure à l'Université nationale du Vietnam, a présenté les résultats qu'elle a obtenus avec Pascal COLLIN et Laurent HAUSWIRTH sur des anneaux minimaux asymptotiques à des plans verticaux dans la variété $PSI_2(\mathbb{R})$ munie de sa métrique homogène. Ils sont obtenus par passage à la limite d'anneaux minimaux compacts.

Le dimanche 20 août matin a été consacré à une visite de la Baie d'Ha Long, malheureusement sous la pluie, le seul moment de la quinzaine où il a plu presque sans discontinuer.

Ma rencontre avec Julien GUERRIER, ambassadeur de l'Union européenne au Vietnam

Le mardi 22 août, j'ai pris mon petit déjeuner avec Julien GUERRIER, que j'ai connu comme directeur des relations interinstitutionnelle de la Direction générale Recherche et Développement de la Commission européenne dans mes fonctions de président du Conseil européen de la recherche. Par ailleurs, ingénieur du corps des Ponts et Chaussées, il avait été mon élève à l'École polytechnique.

Je connaissais son tropisme asiatique car je savais qu'il avait fait un séjour au Japon pour la Commission européenne (en fait il en a fait deux et il parle japonais). Par contre je ne savais pas que, dans ses fonctions à la DG Commerce, il avait été le correspondant du Vietnam. Il a donc déjà une très bonne connaissance de la situation du pays. Il m'a dit que le Vietnam est le pays en voie de développement avec lequel la Commission européenne a la coopération économique et stratégique la plus efficace. Un point où la coopération peut être améliorée est la recherche, et il compte y travailler.

J'ai bien entendu donné les coordonnées de Julien GUERRIER dans ses nouvelles fonctions aux différents mathématiciens vietnamiens ayant des responsabilités avec qui j'ai été en contact.

Ma visite au *Mathematics Institute de la Vietnam Academy of Science and Technology*

Le mercredi 23 août après-midi, où l'école d'été faisait relâche, j'ai été invité par le directeur du *Mathematics Institute de la Vietnam Academy of Science and Technology*, le Professeur DOAN Thai Son à y faire un exposé. Je lui ai proposé de faire une présentation sur les *Trends in Mathematics* (j'annexe le texte de ma présentation à ce rapport).

J'ai ensuite eu une discussion avec quelques membres senior de l'Institut et l'équipe de direction sur la situation singulière de l'Institut.



Discussion avec NGÔ Bao Châu, directeur scientifique du VIASM

Au cours d'un déjeuner, NGÔ Bao Châu a fait le point avec moi sur les problèmes auxquels le VIASM doit faire face actuellement. Maintenant qu'il dispose de locaux tout à fait adéquats, la question la plus brûlante est d'obtenir que son fonctionnement en tant qu'établissement public gagne un peu de flexibilité. Un exemple : le renouvellement du directeur du VIASM a été très difficile à

obtenir à cause de l'application *a priori* aveugle de règles générales. Grâce à sa stature nationale, Châu a tout de même pu obtenir ce renouvellement qui, pour lui, était vraiment une étape essentielle.

Par ailleurs le financement du VIASM n'a pas vraiment cru alors que son activité s'est considérablement développé. Cela implique de trouver de nouvelles ressources ce qui est difficile en soi et rendu encore plus difficile par des règles de gestion des établissements publics extrêmement rigides et pas adaptées à une structure comme le VIASM. Il essaie d'obtenir du soutien de certaines fondations internationales.

Le fait que le CNRS ait décidé d'établir au VIASM un laboratoire international est bien entendu un atout de poids pour consolider l'institut en lui fournissant des visiteurs et aussi en rendant plus naturelles des coopérations avec des institutions françaises dont certaines remontent à très longtemps.

Discussion avec Lê Minh Há, directeur du VIASM

J'ai eu une discussion tout à fait intéressante avec Lê Minh Há qui a abordé avec moi diverses questions pratiques sur les façons par lesquelles il pourrait solliciter de nouvelles ressources pour le VIASM.

Une des lacunes actuelles de ses moyens de financement concerne la possibilité d'accueillir sur des chaires semestrielles ou annuelles des visiteur.e.s, vietnamien.ne.s ou non, pour augmenter l'impact du VIASM dans les capacités de recherche du pays, beaucoup de collègues mathématicien.ne.s étant souvent écrasé.e.s par les tâches d'enseignement. Disposer d'un financement indépendant pour de telles positions pourrait se révéler très efficace.

Dans le même ordre d'idées, il regarde avec intérêt les programmes « Research in Pairs » mis en place par le CIRM et le Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach. Cela pourrait être aussi une cible pour des financements spécifiques.

Activités périphériques

Plusieurs activités périphériques ont accompagné l'École d'été :

- la Conférence Clay qu'André NEVES a donné le 17 août, autour du thème de son cours, a attiré un public plus large que son cours proprement dit avec notamment la présence de nombre de jeunes mathématicien.ne.s vietnamien.ne.s ;
- les organisateurs de l'École d'été m'ont invité ainsi que les autres conférenciers à un dîner convivial pour faire un point informel sur l'avancement de l'École et sur le déroulement de la session à Tuan Chau ;
- les conférenciers ont aussi été invités à un dîner chez les parents de NGÔ Bao Châu accompagné d'un concert de musique traditionnelle d'excellente qualité ;
- la matinée de pause de l'École d'été a été consacrée à une visite de la première université du Vietnam et du Palais Impérial, une occasion de plonger dans le passé historique du Vietnam et de Hanoi.