La suspension homologique pour les CW-complexes finis quotients d'actions libres de $(\mathbb{Z}/2)^n$

Nguyen Dang Ho Hai, Lionel Schwartz

April 22, 2024

IRL CNRS FVMA, Université de Hué, USPN

Cette note est un épilogue à :

Dorra Bourguiba, Jean Lannes, Lionel Schwartz and Said Zarati. *Complexes équivariants de modules instables sur l'algèbre de Steenrod assoviés à un* $\mathbb{Z}/2)^n$*-CW-complexe fini*. A paraître dans **Mémoires Soc. Math. France.**,
Nguyen Dang Ho Hai. *Stanley-Reisner rings and the occurrence of the Steinberg representation in the hit problem.***Comptes Rendus Mathématique**, 360:1009–1026, 2022.

Les articles suivants, plus anciens sont aussi une motivation :
Nguyen Dang Ho Hai et Lionel Schwartz. *Realizing a complex of unstable modules.* **Proc. Japan Acad. Ser A**, 87(5):83–87, 2011.
La fonction de partition de Minc et la cohomotopie de certains spectres de Thom (avec Nguyen D. H. Hai et Tran Ngoc Nam) **Advances in Math**. Volume 225, Issue 3, 20 October 2010.

Soit $V_n = (\mathbb{Z}/2)^n$, H^*X, $H^*_V X$ (resp. $\tilde{H}^*X$, $\tilde{H}^*_V X$) désignent la cohomologie et la cohomologie équivariante (resp. réduite ...) modulo 2.
Soit F un foncteur de la cat:égorie des espaces (ensembles simpliciaux, espaces ayant le type d'homotopie d'un CW-complexe...) dans elle m:ême. Soit X un espace, en g:én:éral la cohomologie de $F(X)$ n'est pas un foncteur de la cohomologie de X.
Il y a des cas où cela est vrai :

- $\Omega\Sigma X$ (X connexe)
- $\Omega^n\Sigma^n X$ (X connexe).
- $\mathrm{map}(BV, X)$ (Lannes).
- La construction quadratique : $E\mathbb{Z}/2 \times_{\mathbb{Z}/2} (X \times X)$ (Milgram)

Voici un autre cas, proche du second.

Théorème

Soit X un $V_n = (/Z/2)^n$-espace dont la cohomologie équivariante est libre comme H^*V_n-module. Alors l'application induite en homologie par l'évaluation (la suspension homologique)

$$\Sigma^{n-1}\Omega^{n-1}[(X/\mathcal{S}ing)/V_n] \to (X/\mathcal{S}ing)/V_n$$

est surjective et la (co)-homologie de $\Omega^{n-1}[(X/\mathcal{S}ing)/V_n]$ est fonctorielle en celle $(X/\mathcal{S}ing)/V_n$.

Soit G un groupe agissant sur un CW-complexe X. On notera de façon générique $\mathcal{S}ing$ le lieu singulier de cette action, c'est à dire le sous-ensemble des points dont le sous-groupe d'isotropie n'est pas réduit à l'élément neutre. L'action de G sur $X_{reg} = X \setminus \mathcal{S}ing$, la partie régulière, est libre.

On peut obtenir un modèle pour le classifiant BV_n de la manière suivante. On choisit une représentation $\mathcal{R}$ de V, on note l'espace de représentation aussi $\mathcal{R}$. On suppose que $\mathcal{R}^V = 0$ et que le lieu singulier $Sing$, qui est une réunion de sous-espaces de $\mathcal{R}$, est non réduit à 0 (ce qui est vrai dès que $n \geq 2$) et n'est pas $\mathcal{R}$ tout entier. La représentation régulière réduite satisfait à ces conditions.

Le groupe V agit librement sur le lieu régulier : $\mathcal{R}_{reg} = \mathcal{R} \setminus Sing$ et sur $(\mathcal{R}^{\oplus k})_{reg}$, ces ensembles sont non-vides. On a une inclusion

$$(\mathcal{R}^{\oplus k})_{reg} \hookrightarrow (\mathcal{R}^{\oplus k+1})_{reg}$$

La dimension du lieu singulier de $\mathcal{R}^{\oplus k}$ croissant linéairement avec k et étant non nulle, la dualité d'Alexander implique que la connexité de $(\mathcal{R}^{\oplus k})_{reg}$ tend vers l'infini avec k. La colimite est donc un modèle pour EV. La colimite des quotients successifs $M_k = (\mathcal{R}^{\oplus k})_{reg}/V$ est un modèle pour BV.

On note $c\mathcal{R}$ le compactifié à l'infini de $\mathcal{R}$, l'action de V s'y étend uniquement.On a :

$$c\mathcal{R} \cong S(\mathcal{R} \oplus \mathbb{R}) \cong \Sigma_{nr}(S(\mathcal{R}))$$

Σ_{nr} désigne la suspension non réduite

La variété M_k est ouverte et est difféomorphe à l'intérieur d'une variété à bord ([1]) et le compactifié à l'infini, cM_k, de M_k est homéomorphe au quotient de cette variété par son bord et au quotient $(c\mathcal{R}^{\oplus k}/Sing)/V$ (voir [1] section 7).
Ces homéomorphismes respectent la structure de V_n-espaces. Pour tout k on a une inclusion $cM_k \hookrightarrow cM_{k+1}$.

Théorème

La colimite des espaces cM_k est homotopiquement équivalente :à un bouquet de copies de $\Sigma^n(BV+)$.

L'isomorphisme de Thom implique que la cohomologie V-équivariante réduite $c\mathcal{R}^{\oplus k}$ est un un H^*V-module libre de rang 1 (voir [1] section 7).
La question initiale [BLSZ], était la suivante :

Question

Soit un V_n-CW-complexe fini X dont la cohomologie équivariante $H^*_V X$ est un H^*V-module libre. L'espace $(X/\mathcal{S}ing)/V_n$ est il, à homotopie près, une n-suspension, ou rétracte d'une n-suspension?

Une indication dans cette direction est que la cohomologie réduite $\tilde{H}^*(X/\mathcal{S}ing)/V_n$ est alors la n-suspension d'un module instable ([1]).

Dans le cas où le H^*V-module libre $H^*_V X$ est libre de rang 1, on sait, [1] section 7, que X est" à homotopie près" le compactifié d'une représentation de V_n. La conjecture suivante est alors raisonnable :

Conjecture

Soit un V_n-CW-complexe fini X dont la cohomologie équivariante $H^*_V X$ est un H^*V-module libre de rang 1. L'espace $(X/\mathcal{S}ing)/V_n$ est, à homotopie près, la suspension n-ème d'un espace ou rétracte d'une telle suspension.

Dans ce cas 0.1 peut être amélioré.

Théorème

Soit $\mathcal{R}$ satisfaisant aux conditions ci-dessus. On a une équivalence d'homotopie

$$\Sigma(c\mathcal{R}/\mathcal{S}ing)/V_n \simeq \vee_1^{d(\mathcal{R})} S^{n+1} \bigvee \Sigma C$$

avec C n-connexe, $d(\mathcal{R})$ un entier et la suspension homologique induite par l'évaluation

$$\Sigma^n \Omega^n C \to C$$

est surjective.

On peut encore préciser dans le cas de la représentation régulière réduite $\widetilde{\mathcal{R}eg}$.

Proposition

Pour tout $d \geq 1$

$$\Sigma(c\widetilde{\mathcal{R}eg}^{\oplus d}/\mathcal{S}ing)/V_n \simeq (\Sigma^3 T) \vee \Sigma X_d$$

où T *est* $\mathrm{GL}(V_n)$*-homotopiquement équivalent à l'immeuble de Tits,* X_d *n-connexe et la suspension homologique induite par l'évaluation*

$$\Sigma^n \Omega^n X_d \to X_d$$

est surjective.

Cela résoud une question soulevée dans [7] :

Théorème

Soit $e_n \in \mathbb{F}_2[\mathrm{GL}(V_n)]$ l'idempotent de Steinberg et $T(k)$ le k-ème spectre de Brown-Gitler ([2]). On a une équivalence d'homotopie de spectres :

$$\Sigma^{-n} e_n.[(c\widetilde{\mathcal{R}eg}^{\oplus 2}/Sing)/V_n] \simeq \bigvee_{i=0}^{n} T(2^i - 1)$$

On rappelle que l'on veut démontrer :

Démonstration

La démonstration de 0.1 est une application directe de résultats de [BLSZ] (initialement de [AFP]) et de David J. Hunter and Nicholas Kuhn.
Characterizations of spectra with $\mathcal{U}$-injective cohomology which satisfy the Brown-Gitler property. **Trans. Amer. Math. Soc.**, 111:95–143, 1980..

Théorème

Soit X un V_n-espace fini dont la cohomologie équivariante $H^*_{V_n}(X)$ est un H^*V_n-module libre alors la suspension homologique

$$H_*(\Sigma^{n-1}\Omega^{n-1}[(X/\mathcal{S}ing/V_n)] \to H_*(X/\mathcal{S}ing)/V_n$$

est surjective.

Les complexes de [BLSZ] fournissent les applications nécessaires à l'application du résultat suivant de Hunter-Kuhn.

Théorème

Soient X un espace n-connexe, Z un espace. Supposons qu'il existe une application $X \to \Sigma^n Z$ injective en homologie. Alors l'application d'évaluation $\Sigma^n \Omega^n X \to X$ est surjective en homologie. Soient X un spectre 0-connexe, Z un espace. Supposons qu'il existe une application $X \to \Sigma^\infty Z$ injective en homologie. Alors l'application d'évaluation $\Sigma^\infty \Omega^\infty X \to X$ est surjective en homologie.

Rappelons le complexe topologique (ou complexe de Atiyah-Bredon) de [BLSZ].

Soit p un entier avec $-1 \leq p \leq n := \dim V$; on définit une filtration croissante de X par

$$F_p X := \bigcup_{\mathrm{codim}\, W \leq p} X^W,$$

$$\emptyset = F_{-1}X \subset F_0 X = X^V \subset \ldots \subset \ldots \subset F_{n-1}X = \mathcal{S}ing \subset F_n X = X.$$

Le complexe de cochaînes $\mathrm{C}^\bullet_{\mathrm{top}} X$:

$$\mathrm{C}^0_{\mathrm{top}} X \to \mathrm{C}^1_{\mathrm{top}} X \to \ldots \to \mathrm{C}^p_{\mathrm{top}} X \to \ldots \to \mathrm{C}^n_{\mathrm{top}} X \to 0 \to \ldots$$

est défini par :

$$\mathrm{C}^p_{\mathrm{top}} X \ := \ \Sigma^{-p}\, H^*_V(F_p X, F_{p-1} X) \quad .$$

Le cobord est le connectant de la triade $(F_{p+1}X, F_pX, F_{p-1}X)$. Ce complexe est muni d'une coaugmentation naturelle $H^*_V(X) =: \mathrm{C}^{-1}_{\mathrm{top}}X \to \mathrm{C}^0_{\mathrm{top}}X$. Le complexe coaugmenté est noté $\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{top}}X$. Le théorème 0.1 de [1] est le suivant (démontré d'abord dans AFP) :

Théorème

Soit un V-CW-complexe fini. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) *Le H^*V-module H^*_VX est libre.*

(ii) *Le complexe coaugmenté $\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{top}}X$ est acyclique.*

Il suit alors du théorème 0.2 et de la proposition 0.3 de [1] que :

Théorème

Sous l'une des hypoythèses précédentes les modules sur l'algèbre de Steenrod $\mathrm{C}^p_{\mathrm{top}}X := \ \Sigma^{-p}H^*_V(F_pX, F_{p-1}X)$ sont instables.

Le connectant du complexe topologique est induit par une application :

$$EV \times_V F_pX/EV \times_V F_{p-1}X \to \Sigma(EV \times_V F_{p-1}X/EV \times_V F_{p-2}X)$$

où les V-espaces $F_kX/F_{k-1}X$ ont des point-bases V-stables évidents.
On a un homéomorphisme :

$$F_kX/F_{k-1}X \simeq \bigvee_{\mathrm{codim} W=k} X^W/Sing$$

Dans le complexe topologique la flèche terminale (à droite) du complexe est donc induite par une application :

$$EV \times_V X/\mathcal{S}ing \to \bigvee_{\mathrm{codim} W=n-1} EV \times_V \Sigma(X^W/Sing)$$

en écrasant en un point de chaque côté le facteur BV correspondant au point base. Donc à homotopie près on a une application:

$$(X/\mathcal{S}ing)/V \to \bigvee_{\mathrm{codim} W = n-1} \Sigma(B\mathbb{Z}/2 \times X^W/\mathcal{S}ing)/(V/W) \quad (1)$$

qui est surjective en cohomologie sous l'hypothèse que le $\mathrm{H}^* V$-module $\mathrm{H}^*_V X$ est libre.

Les propositions 1.1 et 4.11 de [1] montrent que si $H^*_V X$ est libre comme $H^* V$-module, alors $H^*_{V/W} X^W$ est libre comme $H^* V/W$-module. Donc par composition on obtient une application :

$$(X/\mathcal{S}ing)/V \to \bigvee_{W_1 \subset W_2} \Sigma^2(B(\mathbb{Z}/2)^2 \times X^{W_2}/\mathcal{S}ing)/(V/W_2) \quad (2)$$

aveavec $\mathrm{codim}(W_2) = n-2, \ \ codim(W_1) = n-1$ qui est encore surjective en cohomologie.

En itérant on obtient :

Lemme

Si la cohomologie équivariante de X est H^*V-libre il existe une application

$$(X/\mathcal{S}ing)/V \to \bigvee_D \Sigma^n(BV \times X^V+)$$

vers le bouquet indexé par les drapeaux $D = \{(0 \subsetneq W_1 \subsetneq W_2 \subsetneq \ldots \subsetneq W_n = V)\}$ qui est surjective en cohomologie, donc injective en homologie.

L'espace singulier étant dans le dernier pas de l'itération est vide, ce qui explique l'apparition du point adjoint $+$.
On est dans les conditions d'application de la proposition de [HK], sauf que $(X/\mathcal{S}ing)/V$ est seulement $(n-1)$-connexe. Ceci donne donc 0.1.

Le cas particulier où le V_n-complexe fini est le compactifié $c\mathcal{R}$ d'une représentation $\mathcal{R}$:

Théorème

Soit $\mathcal{R}$ une représentation de V_n telle que $\mathcal{R}^{V_n} = 0$. On a une équivalence d'homotopie

$$\Sigma(c\mathcal{R}/\mathcal{S}ing)/V_n \simeq \vee_1^{d(\mathcal{R})} S^{n+1} \bigvee \Sigma C$$

avec C n-connexe, $d(\mathcal{R})$ un entier et la suspension homologique

$$H^*(\Sigma^n \Omega^n C) \to H^*(C)$$

est surjective.

On note $c\mathcal{R}^k$ le compactifié de la représentation $\mathcal{R}^{\oplus k}$. On a un système inductif

$$c\mathcal{R}/Sing \hookrightarrow c\mathcal{R}^2/Sing \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow c\mathcal{R}^k/Sing \hookrightarrow \ldots$$

dont le télescope sera noté $c\mathcal{R}^\infty/Sing$. On a également le sytème obtenu par quotient :

$$(c\mathcal{R}/Sing)/V \hookrightarrow (c\mathcal{R}^2/Sing)/V \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow (c\mathcal{R}^k/Sing)/V \hookrightarrow \ldots$$

et le téléscope $(c\mathcal{R}^\infty/Sing)/V$.

Lemme

Si $\mathcal{R}^V = 0$, pour tout k l'application induite en cohomologie par $(c\mathcal{R}^k/Sing)/V \hookrightarrow (c\mathcal{R}^{k+1}/Sing)/V$ est surjective, c'est un isomorphisme en degré n.

Ce lemme est déjà démontré dans [BLSZ] (Proposition 7.39) dans le cas de la représentation régulière réduite. Dans le cas général on la démontre par récurrence sur la dimension de V.
On rappelle d'abord l'isomorphisme [BLSZ] :

$$\mathrm{C}^n_{\mathrm{top}}(c\mathcal{R}^k) \cong \Sigma^{-n}\tilde{H}^*((c\mathcal{R}^k/Sing)/V)$$

Proposition

Soit $\mathcal{R}$ une représentation telle que $\mathcal{R}^V = 0$. Le télescope $c(\mathcal{R}^\infty/Sing)/V$ est homotopiquement équivalent à un bouquet de n-suspensions de $BV+$.

On considère les complexes $\mathrm{C}^\bullet_{\mathrm{top}}(c\mathcal{R}^k/Sing)$ et on passe à la limite sur k. Le complexe obtenu demeure exact, les conditions de Mittag-Lefler étant satisfaites. On peut supposer par hypothèse de récurrence que tous les termes, sauf le dernier, sont des sommes directes de copies de H^*V. Il en est donc de même du dernier [5]. Il suit que comme module instable, $H^*((c\mathcal{R}^\infty/Sing)/V)$ est somme directe de copies de $\Sigma^n H^*V$. L'identification homotopique résulte alors des arguments sur le connectant du complexe.

$$
\begin{tikzcd}
e^{k+1}H^*V \arrow[r, "i"] \arrow[d] & H^*V \arrow[r] \arrow[d] & \ldots \arrow[r] & C^p_{top}(c\mathcal{R}^{k+1}) \arrow[r] \arrow[d] & {} \\
e^{k}H^*V \arrow[r, "i"] & H^*V \arrow[r] & \ldots \arrow[r] & C^p_{top}(c\mathcal{R}^{k}) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & C^p_{top}(c\mathcal{R}^{k+1}) \arrow[r] \arrow[d] & \ldots \arrow[r] & H^*_V(cR^{k+1}/Sing) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
{} \arrow[r] & C^p_{top}(c\mathcal{R}^{k}) \arrow[r] & \ldots \arrow[r] & H^*_V(cR^{k}/Sing) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

e est la classe d'Euler du fibré vectoiel $\mathcal{R} \times_V EV \to BV$, ici $e \not 0$.

Avec

$$C^p_{top}(X) = \oplus_{W,\, codim(W)=p}\ \Sigma^{-p}\tilde{H}^*_V(F_pX/F_{p-1}X)$$

$$\cong \oplus_{W,\, codim(W)=p} H^*V \otimes_{H^*VW} H^*_{V/W}(X^W, Sing)$$

et en particulier

$$C^n_{top}(X) = \ \Sigma^{-n}\tilde{H}^*_V(X/Sing) = \Sigma^{-n}H^*([X/Sing]/V)$$

Scindage du n-squelette

Ce résultat donne une application

$$(c\mathcal{R}^\infty/Sing)/V \to \vee_1^{d(\mathcal{R})} S^n$$

qui induit un isomorphisme en cohomologie en dimension n pour un certain entier $d(\mathcal{R})$ et donc, pour $k \geq 1$ quelconque une application :

$$(c\mathcal{R}^k/Sing)/V \to \bigvee_1^{d(\mathcal{R})} S^n$$

qui a la même propriété. en notant X_k le quotient de l'espace par le n-squelette on a :

Corollaire

Sous l'hypothèse ci dessus sur $\mathcal{R}$:

$$\Sigma(c\mathcal{R}^k/Sing)/V \simeq \vee_1^{d(\mathcal{R})} S^{n+1} \bigvee \Sigma X_k$$

avec X_k n-connexe.

L'immeuble de Tits

On précise le 2.4 dans le cas de la représentation régulière réduite $\widetilde{\mathcal{R}eg}$ et démontre la proposition 0.6.

Proposition

Dans le cas où $\mathcal{R}$ est la représentation régulière réduite $\widetilde{\mathcal{R}eg}$ on a :

$$\Sigma(c\widetilde{\mathcal{R}eg}^k/Sing)/V \simeq \Sigma^3 T \vee \Sigma X_k$$

où T est $\mathrm{GL}(V_n)$-homotopiquement à l'immeuble de Tits et X_d n-connexe.

Soit le sous-ensemble des vecteurs non nuls de V_n, on indexe les sommets du simplexe Δ^{2^n-1} par ces vecteurs. Soit Γ_n le sous-complexe constitué par les faces indexées par les sytèmes de vecteurs qui n'engendrent pas V_n, Γ_n est un $\mathrm{GL}(V_n)$-espace.

Lemme

Le $\mathrm{GL}(V_n)$-espace Γ_n est $\mathrm{GL}(V_n)$-homotopiquement équivalent à l'immeuble de Tits de V_n.

Soit $\mathcal{S}_n$ la catégorie dont les objets sont les sous-ensembles de vecteurs non nul de V_n qui n'engendrent pas V_n, les morphismes l'inclusion. La réalisation géométrique du nerf, $N(\mathcal{S}_n)$, de $\mathcal{S}_n$ est la subdivision barycentrique de Γ_n.
$\mathcal{W}_n$ la catégorie des sous-espaces W non-triviaux de V_n $(0 \neq W \neq V_n)$.
Le foncteur $\mathcal{G}en : \mathcal{S}_n \to \Gamma_n$, qui envoie un sytème de vecteurs vers le sous-espace qu'il engendre, vérifie les conditions du Théorème A de Quillen [9]. En effet chaque sous-catégorie $W \setminus \mathcal{G}en$ a pour objet terminal, l'ensemble des vecteurs non nul de W. Le résultat suit.

Rappelons le joint de $X_1, \ldots, X_t$

$$\mathbb{J}(\underline{X}) = \bigstar_{1 \leq i \leq t} X_i$$

Si chacun des X_i est un point le joint n'est autre que Δ^{t-1}. Si de plus chacun des X_i est un G-espace, G un groupe, l'application induite par les projections sur un point :

$$\mathbb{J} = \bigstar_{1 \leq i \leq t} X_i \to \Delta^{t-1}$$

est équivariante et passe au quotient et, l'action sur Δ^{t-1} étant triviale, donne

$$\mathbb{J}/G \to \Delta^{t-1}$$

Si de plus on choisit pour chaque X_i un point base on récupère une application qui n'est pas équivariante :

$$\Delta^{t-1} \to \mathbb{J}$$

mais par composition :

$$\Delta^{t-1} \to \mathbb{J} \to \mathbb{J}/G$$

La composée

$$\Delta^{t-1} \to \mathbb{J} \to \mathbb{J}/G \to \Delta^{t-1} \tag{3}$$

est l'identité.
Explicitons dans le cas de $c\mathcal{R}eg^k$, on abrègera $c\mathcal{R}eg^k$ en $c\mathcal{R}$ dans ce qui suit . Les $2^n - 1$ représentations non triviales (de dimension 1) de V_n sont notées ρ_i, $1 \leq i \leq 2^n - 1$, $\mathcal{R}$ s'écrit

$$\mathcal{R} \cong \oplus_i \rho_i^k.$$

On notera E_i pour $\rho_i^{\oplus k}$. On a un isomorphisme de V_n-espaces

$$S(\mathcal{R}) \cong \bigstar_{1 \leq i \leq 2^n - 1} S(E_i)$$

où $S(E_i)$ désigne la sphère unité de E_i.

Dans ce cas si on considère les applications considérées ci-dessus (en (3)) on constate que Γ_n prend valeurs dans $\mathcal{S}ing$ qui lui s'envoie sur Γ_n. L'action de V_n sur Γ_n étant triviale on obtient le :

Lemme

On a un diagramme commutatif à homotopie près, dont les colonnes sont de cofibrations :

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_n \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{S}ing/V_n \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma_n \arrow[d] \\
\Delta^{2^n-2} \arrow[r] \arrow[d] & c\widetilde{\mathcal{R}eg}^k/V_n \arrow[r] \arrow[d] & \Delta^{2^n-2} \arrow[d] \\
\Sigma(\Gamma_n) \arrow[r] & (c\widetilde{\mathcal{R}eg}^k/\mathcal{S}ing)/V_n \arrow[r] & \Sigma(\Gamma_n)
\end{tikzcd}$$

Les carrés supérieurs commutent exactement. Ceux du bas aussi en remplaçant les quotients de la ligne inférieure par des cônes. Les composées horizontales supérieures et inférieures sont l'identité et les flèches horizontales $\mathrm{GL}(V_n)$ équivariantes.

Question homotopique

Etant donnée la description préccédente on peut ramener la question initiale (dans le cas considéré) Ìla qusetion suivante dans le cas de V_2.
X un V_2-espace. $\nabla : \Sigma X \to \bigvee_1^3 \Sigma X$ la comultiplication itérée.
$f_i : X \to Y$, $1 \leq i \leq 3$
La cofibre de la composée

$$\Sigma X \xrightarrow{\nabla} \bigvee_1^3 \Sigma X \xrightarrow{\bigvee_1^3 f_i} \bigvee_1^3 \Sigma Y$$

est elle homotope à une suspension?

Les spectres de Brown-Gitler

On appelle spectre Brown-Gitler un spectre $T(k)$ 2-complet dont la cohomologie est isomorphe au module instable $J(k)$ et qui vérifie l'une des hypothèses du théorème 1.1 de [HK]. Un spectre X à la propriété de Brown-Gitler si pour tous les spectres Z, rétracte du spectre en suspension d'un espace, l'application naturelle

$$[X, Z] \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(H^* Z, H^* X)$$

est surjective. Ici $\mathscr{A}$ est l'algèbre de Steenrod modulo (2).

Théorème

Soit X un spectre dont la cohomologie est injective dans la cat:égorie $\mathscr{U}$. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes.
(i) Il existe un spectre Y dont la cohomologie est un module instable injectif réduit et une application $f : X \to Y$ surjective en cohomologie.
(ii) X satisfait :à la propriété de Brown-Gitler.

Le candidat arrive d'emblée avec une application satisfaisant aux propriétés de la première condition. Il faut montrer que sa cohomologie est celle attendue.
Cela est fait dans [7], revenons dessus. Le groupe linéaire $\mathrm{GL}(V)$ agit sur le quotient $(c\widetilde{\mathcal{R}eg}^2/Sing)/V$. On peut, et après suspension, appliquer l'idempotent de Steinberg et décomposer l'espace en bouquet de deux espaces. En fait dans ce cas il n'est pas nécessaire de suspendre car $(c\widetilde{\mathcal{R}eg}^2/Sing)/V$ est déjà une suspension compatible à l'action de $\mathrm{GL}(V)$.

Théorème

Soit e_n l'idempotent de Steinberg de $\mathbb{F}_2[\mathrm{GL}(V)]$. Le spectre

$$\Sigma^{-n}e_n.(c\widetilde{\mathcal{R}eg}^2/Sing)/V$$

est homotopiquement équivalent au bouquet $\bigvee_{i=0}^{n} T(2^i-1)$.

Le lemme 1.4 dit exactement que l'on peut appliquer le théorème 5.1 en utilisant les résultats de [7].

On rappelle en quelques lignes pourquoi le spectre en question a la bonne cohomologie. Étant donné un $\mathscr{A}$-module M, on rappelle que le dual de Spanier-Whitehead $\mathbb{D}M$ est défini par

$$\begin{cases} (\mathbb{D}M)^{-n} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(M^n, \mathbb{Z}/2), & n \in \mathbb{Z}, \\ \theta(f) = f \circ (\chi(\theta)), & f \in \mathrm{D}M, \theta \in \mathscr{A}, \end{cases}$$

χ étant l'antipode de $\mathscr{A}$. On a des isomorphismes

$$\begin{aligned} \tilde{H}^*((c\widetilde{\mathcal{R}eg}^2/Sing)/V) &\cong H_c^*((\widetilde{\mathcal{R}eg}^2 \setminus Sing)/V) \\ &\cong \Sigma^{2(2^n-1)}\mathbb{D}H^*((\widetilde{\mathcal{R}eg}^2 \setminus Sing)/V). \end{aligned}$$

Le premier isomorphisme est bien $\mathscr{A}$-linéaire et on va expliquer la $\mathscr{A}$-linéarité du second qui est donné par la dualité de Poincaré.

On vérifie que $H^*((\widetilde{\mathcal{R}eg}^2 \setminus Sing)/V)$ I est isomorphe à l'anneau quotient fini $\mathbf{R}(V^*, 2)$ de H^*V ([Hai]).
Il y est montré montré que le facteur de $\mathbf{R}(V^*, 2)$ associé à la représentation de Steinberg est isomorphe à la somme directe

$$\bigoplus_{i=0}^{n} \Sigma^{2(2^n-1)-n-(2^i-1)} B(2^i - 1)$$

où les modules de Brown-Gitler $B(k)$ et $J(k)$ sont liés par $\Sigma^k \mathbb{D}B(k) \cong J(k)$.
Il faut expliquer la $\mathscr{A}$-linéarité de la dualité de Poincaré

$$H_c^*((\widetilde{\mathcal{R}eg}^2 \setminus Sing)/V) \cong \Sigma^{2(2^n-1)} \mathbb{D} H^*((\widetilde{\mathcal{R}eg}^2 \setminus Sing)/V).$$

Pour cela, soit X une variété sans bord de dimension d (pas nécessairement compact, voir par exemple [3], Chapter 3). La dualité de Poincaré est donnée par

$$\mathrm{D} : H_c^{d-i}X \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(H^iX, \mathbb{F}_2), \qquad \mathrm{D}(x)(y) = x \cup y \in H_c^d(X) \cong \mathbb{F}_2.$$

Pout tout $x \in H_c^{d-i}(X)$, on a $\mathrm{Sq}^i(x) = x \cup v_i(\tau_X)$ où $v_i(\tau_X)$ est la i-ème classe de Wu du fibré tangent, τ_X, de X ([6]). La dualité de Poincaré D est $\mathscr{A}$-linéaire si $v_i(\tau_X) = 0$ pour tout $i > 0$.

En effet, pour tout $u \in H_c^{d-t-m}(X)$ et tout $v \in H^t(X)$, on a

$$\mathrm{Sq}^m(u) \cup v + \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Sq}^i(u \cup (\chi \mathrm{Sq}^{m-i} v)) + u \cup \chi \mathrm{Sq}^m(v) = 0$$

Donc si les classes de Wu de τ_X sont triviales le terme au milieu s'annule ce qui implique que

$$\mathrm{Sq}^m(u) \cup v = u \cup \chi \mathrm{Sq}^m(v).$$

Il suit que D envoie $\mathrm{Sq}^m(u)$ sur la fonction

$$v \mapsto \mathrm{Sq}^m(u) \cup v = u \cup \chi \mathrm{Sq}^m(v),$$

et $\mathrm{Sq}^m(\mathrm{D}(u))$ est la fonction composée $v \mapsto \chi \mathrm{Sq}^m(v) \mapsto u \cup \chi \mathrm{Sq}^m(v)$. Ceci montre que D commute avec Sq^m.

On revient à notre cas où $X = (\widetilde{\mathcal{R}eg}^2 \setminus Sing)/V$ est une variété de dimension $d = 2(2^n - 1)$. Par instabilité, si $i > \frac{d}{2} = 2^n - 1$ et $x \in H_c^{d-i}(X)$, alors $\mathrm{Sq}^i(x) = x \cup v_i(\tau_X) = 0$, ce qui implique que $v_i(\tau_X) = 0$ car la forme bilinéaire $H_c^{d-i}X \times H^iX \to H_c^dX \cong \mathbb{F}_2$ est non-dégénérée.

Le fibré tangent τ_X est le "pullback" du fibré $\mathrm{E}V \times_V \widetilde{\mathcal{R}eg}^2 \xrightarrow{\rho_2} \mathrm{B}V$ induit par une application $f : X \to \mathrm{B}V$. La classe totale de Stiefel-Whitney de ρ_2 est donnée par

$$w(\rho_2) = \prod_{0 \neq \alpha \in V^*} (1+\alpha)^2 = (1 + Q_{n,0} + \cdots + Q_{n,n-1})^2,$$

où $|Q_{n,i}| = 2^n - 2^i$ et $\mathbb{F}_2[Q_{n,0}, \ldots, Q_{n,n-1}] \cong H^* V^{\mathrm{GL}_n}$ est l'algèbre d'invariants de Dickson. Donc $w_i(\rho_2)$ est trivial si $0 < i \leq 2^n - 1$. Par naturalité, $w_i(\tau_X) = 0$ si $0 < i \leq 2^n - 1$. Utilisant la formule $v(\tau_X) = \chi\mathrm{Sq}(w(\tau_X))$, on voit que $v_i(\tau_X) = 0$ si $0 < i \leq 2^n - 1$. Donc $v_i(\tau_X) = 0$ pour tout $i > 0$.

Dorra Bourguiba, Jean Lannes, Lionel Schwartz and Said Zarati.
Complexes équivariants de modules instables sur l'algèbre de Steenrod assoviés à un $\mathbb{Z}/2)^n$-CW-complexe fini.
To appear in *Mémoires Soc. Math. France.*, (accepté 2023),

Paul Goerss, Jean Lannes and Fabien Morel.
Vecteurs de Witt non commutatifs et représentabilité de l'homologie modulo p
Invent. Math., 108(1):163–227, 1992.

Allen Hatcher.
Algebraic topology.
Ann. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

David J. Hunter and Nicholas Kuhn. .
Characterizations of spectra with $\mathcal{U}$-injective cohomology which satisfy the Brown-Gitler property.
Trans. Amer. Math. Soc., 111:95–143, 1980.

Jean Lannes et Lionel Schwartz.

Sur la structure des A-modules instables injectifs.
Topology, 22(3):153–169, 1989.

John Milnor and James Stasheff.
Characteristic classes
Annals of Mathematics Studies, 76 1974.

Nguyen Dang Ho Hai.
Stanley-Reisner rings and the occurrence of the Steinberg representation in the hit problem.
Comptes Rendus Math:ématique, 360:1009–1026, 2022.

Nguyen Dang Ho Hai et Lionel Schwartz.
Realizing a complex of unstable modules.
Proc. Japan Acad. Ser A, 87(5):83–87, 2011.

Daniel Quillen.
Algebraic K-theory : I.
Sringer SLNM 341: 77–139, 1972.

Lionel Schwartz.

Unstable modules over the Steenrod algebra and Sullivan's fixed point set conjecture.
Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press,
Chicago, IL, 1994.